Mateusz Uliński

(student II roku wydziału MiNI PW)

Uwagi na temat twierdzenia Gödla

Wstęp

Twierdzenie Gödla jest jednym z najbardziej znanych wyników logiki matematycznej. Zanim przejdę do uwag na jego temat, zaprezentuję krótko sylwetkę matematyka, który je sformułował.

Kurt Gödel urodził się 28 kwietnia 1906 w Brnie (należącym wtedy do Austro-Wegier), a zmarł 14 stycznia 1978 w Princeton. Czasy, w których żył, obfitowały w wielkich matematyków, jak też i prekursorów współczesnej informatyki. Wiedeń był w jego czasach jednym z największych ośrodków naukowych na świecie, gdzie zbierały się wielkie umysły i tworzyły najważniejsze teorie. Warto by tu przytoczyć opis zarysowany szerzej przez W. Marciszewskiego w (1), a którego fragment ze względu na ten opis (mógłbym powiedzieć „przejaskrawienie" – tak się ten zabieg nazywa – ale pewnie skłamałbym, ponieważ Gödel najprawdopodobniej był aż tak „dobry"):

Wybitny polski logik matematyczny Andrzej Mostowski (1913- 1975), jeden z głównych kontynuatorów dzieła Gödla, opowiadał o wrażeniach z jego seminarium, na które jeździł do Wiednia w latach trzydziestych ubiegłego wieku. Mostowski wspominał, że wyglądało to tak, jak gdyby Gödel dysponował bezpośrednim telefonem do Pana Boga, i w najtrudniejszych problemach po chwili „konsultacji" miał gotowe rozwiązanie.

Praca na Uniwersytecie Wiedeńskim pozwoliła temu genialnemu uczonemu rozwinąć wiele dziedzin, nie tylko logiki matematycznej. Tu doktoryzował się w roku 1929 pod okiem Hansa Hahna. W roku 1931 opublikował pracę „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I.", w której sformułował twierdzenie o niezupełności. Praca ta została przyjęta jako praca habilitacyjna (promotorem był znowu Hahn). Niezależnie od problemów zdrowotnych, Gödel funkcjonował jako uczony, uzyskując w roku 1935 rezultaty w badaniach nad pewnikiem wyboru.

Pod sam koniec lat trzydziestych Gödel wyjechał do Princeton, gdzie pracował w pierwszym semestrze roku akademickiego 1938-1939 w Institute for Advanced Study. Całą resztę życia spędził w Institute for Advanced Study w Princeton jako profesor. Ciekawa anegdota dotyczy jego starań o obywatelstwo amerykańskie. W tym celu należało między innymi zdać „egzamin" ze znajomości konstytucji Stanów Zjednoczonych. Gödel, przygotowując się do egzaminu, uznał, że sama konstytucja jest wewnętrznie sprzeczna logicznie, co usiłował udowodnić przed komisją egzaminacyjną.

Jego najbliższym przyjacielem w Princeton był Albert Einstein. Ich współpraca wpłynęła zapewne na bardzo interesujący (z teoretycznego punktu widzenia) wynik w pracy nad Ogólną Teorią Względności. Otóż Gödel znalazł rozwiązania równania Einsteina dopuszczające podróże w czasie.

Twierdzenie, zarys dowodu i kilka ważnych pojęć

Twierdzenie Gödla orzeka, że każdy wystarczająco rozbudowany (zawierający aksjomaty arytmetyki) system formalny jest albo niezupełny albo wewnętrznie sprzeczny. Zarys dowodu przedstawia konstrukcję zdania niewątpliwie prawdziwego, a jednak nie posiadającego dowodu formalnego w danej teorii.

Zacznijmy od wyjaśnienia kilku pojęć wyżej sformułowanych. Zakładam znajomość u czytelnika podstawowych pojęć logiki matematycznej (takich ze szkoły średniej; w przeciwnym wypadku kilka chwil „na wikipedii" powinno wystarczyć). Dowód formalny jest to ciąg zdań prawdziwych teorii, w którym każde nowe zdanie jest aksjomatem teorii lub wynika ze zdań poprzednich i praw wnioskowania logiki. Antynomia jest to zdanie, dla którego wartościowanie zarówno prawdy jak i fałszu prowadzi do sprzeczności (lub inaczej: zdanie prowadzące do sprzeczności, niezależnie od tego, czy uzna się je za prawdziwe, czy za fałszywe). Zdanie dowodliwe jest to zdanie logiczne, dla którego istnieje dowód formalny. Zdanie prawdziwe rozumiem za W. Marciszewskim jako zdanie nie tworzące sprzeczności z żadnym innym zdaniem w danym systemie formalnym. Tyle tytułem wstępu.

Pomysł dowodu polega na tym, by w pewien sposób ponumerować zdania logiczne, tak aby zamienić twierdzenia w formuły wyrażone w języku arytmetyki. Udaje się to uczynić, ponieważ każda liczba naturalna (większa od 1) ma jednoznaczny rozkład na czynniki pierwsze. Każdemu operatorowi i każdej zmiennej możemy przypisać unikatowy numer, a następnie ten numer przedstawić jako wykładnik liczby pierwszej. Ciąg kolejnych liczb pierwszych wraz z wykładnikami będzie jednoznacznie identyfikował formułę logiczną, będąc jednocześnie liczbą naturalną. Teraz trzeba tylko znaleźć zdanie, które jest niewątpliwie prawdziwe, a niedowodliwe i przetłumaczyć je przy pomocy powyższych odwzorowań na język arytmetyki. Szczegóły techniczne tego procesu są jednak zbyt skomplikowane (jak dla mnie), żeby je tutaj opisywać. Oczywiście zachęcam do zapoznania się z materiałami i odnośnikami do pozycji wartych przeczytania w materiałach, na podstawie których pisałem esej.

Związek twierdzenia Gödla z problemami Hilberta

W matematyce wielokrotnie próbowano wprowadzić porządek. Słynne zdanie naszego wielkiego rodaka Stefana Banacha, że „dobrzy matematycy widzą analogie między twierdzeniami, lepsi między teoriami, ale najlepsi widzą analogie między analogiami" implikuje cel matematyki jako uogólnianie poznanych prawd i rozwijanie teorii z wysnutych na ich podstawie hipotez.

Zastanawiając się nad strukturą matematyki i jej podstawami, wypracowano specjalną teorię – logikę matematyczną – powalającą na usystematyzowanie wiedzy. Zgodnie z jej postulatami każda teoria (nie tylko matematyczna) powinna dążyć do tego, by jak dobra i poczciwa przestrzeń liniowa mieć swoją bazę – to znaczy zestaw aksjomatów (przy założeniu pewnika wyboru można udowodnić, że każda przestrzeń liniowa ma bazę). Logika miała stanowić metateorię – to znaczy miała zapewnić zestaw reguł pozwalających generować różne „kombinacje" aksjomatów i ich konsekwencji, reguł pozwalających wyprowadzić z aksjomatów całą teorię (zbiór twierdzeń danej teorii).

Problemy zaczęły się pojawiać w związku z tym, że ową „generowaną kombinacją" był dowód formalny (pojęcie zdefiniowane w akapicie o dowodzie twierdzenia Gödla). A dowód formalny nie zawsze udawało się znaleźć (teraz kiedy już wiemy o twierdzeniu Gödla jasne jest, że nie zawsze się da). W tych czasach narodził się sławny program Hilberta mający na celu udowodnienie niesprzeczności arytmetyki, to znaczy, że na bazie aksjomatów arytmetyki nie da się wygenerować dowodów zdania i jego zaprzeczenia (jako zdanie rozumiejąc zdanie logiczne należące do systemu formalnego jakim jest arytmetyka naturalnie). Niedługo potem bo zaledwie kilka lat później urodził się Kurt Gödel, którego twierdzenie miało poważnie wpłynąć na program Hilberta. Mam na myśli twierdzenie o niedowodliwości niesprzeczności aksjomatyki Peano.

Stwierdza ono, że w ramach arytmetyki nie może zostać przeprowadzony dowód jej niesprzeczności. Nie można jednak interpretować tego jako stwierdzenie, że arytmetyka jest sprzeczna. Nie ma, jak na razie, również dowodu na sprzeczność arytmetyki.

Tyle mówi o tym logika matematyczna. A spoglądając z punktu widzenia, powiedziałbym, filozofii nauki? Można by to interpretować jako ograniczenie dla procesu porządkowania, ponieważ twierdzenie implikuje niemożliwość zamknięcia problemu arytmetyki, jednego z podstawowych działów matematyki. A skoro arytmetyka jest taką podstawową dziedziną to ograniczenie czy cień rzucone na nią rzucają cień na całą matematykę.

Uważam jednak, że nie należy się martwić o rozwój matematyki, gdyż to pozorne ograniczenie ukazuje tak naprawdę bezmiar matematyki. Wiadomo, że gdyby zdanie Gödla dodać do aksjomatów to można by skonstruować kolejne zdanie, które miało by tę samą właściwość. Co więcej, jeśli dobrze rozumiem, można do tej teorii dodać przeliczalną ilość takich aksjomatów i nadal będzie niezupełna (tzn. zdań rekurencyjnych prawdziwych; po dodaniu innych może się okazać sprzeczna). To obrazuje jak bardzo matematyka się może rozrosnąć, mimo gigantycznych rozmiarów jakimi teraz dysponuje. Myślę, że przy czasie dążącym do nieskończoności, matematyka dąży do nieskończoności.

Zdanie niedowodliwe a paradoks kłamcy

Autor eseju „Dynamika umysłu w perspektywnie gödlowskiej" (zob. [1]) opisuje generowanie zdania niedowodliwego zaczynając od przykładu antynomii kłamcy. Przypomnimy: antynomia to zdanie dla którego przyjęcie zarówno tego, że jest prawdziwe, jak tego, że jest fałszywe, prowadzi do sprzeczności. Problem kłamcy to problem osoby wypowiadającej zdanie „zawsze kłamię" albo jak to napisał autor eseju „zawsze jestem omylny". Jeśli uznamy zdanie „zawsze kłamię" za prawdziwe, wtedy musimy przyjąć, że każda wypowiedź kłamcy też jest fałszem, a przecież nasze zdanie też jest taką wypowiedzią - sprzeczność. Załóżmy więc dla odmiany, że zdanie „zawsze kłamię" jest fałszem, ale jeśli osoba wypowiadająca je nie powiedziała nigdy (wcześniej, możemy to sobie wyobrazić) prawdy to zdanie to stanie się prawdą – znowu sprzeczność.

Faktem jest, że zdanie to powoduje sprzeczność niezależnie od jego wartościowania. Ale czy zaprzeczenie antynomii jest zdaniem bezwarunkowo prawdziwym, skoro nie można stwierdzić, czy antynomia jest fałszem (takie rozumowanie prowadzi do sprzeczności)? Rozumując w drugą stronę: skoro zdanie „nie zawsze jestem omylny" jest prawdą, to z prawa wyłączonego środka zdanie „jestem zawsze omylny" jest fałszem. Zakładając dodatkowo, że dany człowiek nie wyraził żadnej innej opinii, otrzymujemy sprzeczność, bo cechując, że „jestem zawsze omylny" jest fałszem sprawiamy, że jedyne zdanie jakie człowiek wypowiedział jest fałszywe, więc zdanie „jestem zawsze omylny" jest prawdziwe. W ten sposób dochodzimy do sprzeczności. Czyli ze zdania prawdziwego wynika sprzeczność. Nie jestem więc pewien, czy budowanie zdań prawdziwych na zasadzie zaprzeczeń antynomii ma sens, ponieważ uważam, że zaprzeczenia antynomii mimo, że pozornie prawdziwe, generują antynomię na podstawie prawa wyłączonego środka. A skoro przyjmujemy logikę dwuwartościową i to prawo, musimy się zgodzić z bezcelowością takich działań. Osobiście wyłączyłbym wszystkie antynomie z rozważań na temat zarówno problemów zupełności jak i niesprzeczności dziedzin matematyki, takich jak arytmetyka. Nie twierdzę, by autor eseju zarówno jak i Kurt Gödel się mylili. Uważam po prostu, że niektóre analogie nie są idealnie dobrane i dlatego przynajmniej mi osobiście ciężko przyjąć twierdzenie podane w taki sposób.

Mógłby ktoś zadać pytanie, dlaczego podważam prawdziwość zaprzeczenia antynomii kłamcy pod pewnym warunkiem – to znaczy, że wcześniej prawdy nie powiedział. Dlatego, bo w tym przypadku nie można poprawnie nacechować antynomii i to jest jej antynomiczny sens (neologizm?). Gdyby przyjąć warunek przeciwny, to zdanie byłoby faktycznie fałszywe, a zaprzeczenie antynomii prawdziwe. Ale co to za zdanie prawdziwe, które by orzec jego poprawność wymaga dodatkowych założeń, nie jest prawdą zawsze, nie jest prawdą uniwersalnie.

Zanurzanie metajęzyka w teorię, a zdanie stworzone na potrzeby teorii

Chciałbym poruszyć ważną kwestię różnicy pomiędzy metajęzykiem teorii, a językiem teorii i w konsekwencji zdaniami teorii. Jak zauważyłem, czytając materiały, zdanie Gödla opiera się właśnie na włączeniu zdania z metajęzyka, po uprzednim przetworzeniu na język teorii w poczet zdań teorii. Procedura ze względów formalnych jest jak najbardziej poprawna, ale – jak to widać w przypadku zwykłych zdań – takie zdania rekurencyjnie odwołujące się do samych siebie rodzą problemy. Nie zawsze muszą być antynomiami, ale bywają i takie przypadki.

Jest zapewne taki etap (albo kierunek) badań nad teorią, że nawet tego typu zdania trzeba brać pod uwagę ale nie sądzę, by w rozwoju teorii rozpatrywanie tych zdań było koniecznością. Przecież zdanie Gödla to majstersztyk w dziedzinie wykorzystywania aparatu matematycznego w konkretnym celu. Ale czy taki cel należy sobie stawiać? Czy pomimo swojego piękna i tego jak wpływa na ogólny zarys matematyki, twierdzenie Gödla wnosi do matematyki coś przydatnego? Wydaje mi się, być może z braku wiedzy, że jest to taka sztuka dla sztuki. Matematyka mogłaby się dalej rozwijać tak jak się rozwija nawet bez tego twierdzenia, w końcu czym jest jedno twierdzenie wobec jej bezmiaru. Nawet gdyby przyjąć, że arytmetyka jest sprzeczna (co jest dużo silniejsze niż niemożność dowiedzenia jej niesprzeczności), nie moglibyśmy tak od razu zastąpić jej czymś innym, ani nawet nie istniałaby potrzeba, aby to robić w wielu dziedzinach (praktycznych zastosowań). Przecież skoro przez tyle wieków służyła nam w tych dziedzinach dobrze, to nie przestalibyśmy jej używać z powodu dość sztucznie znalezionego twierdzenia.

Nie uważam jednak, choć moja wypowiedź może trochę na to wyglądać, że badania nad takimi twierdzeniami jak tw. Gödla są bez znaczenia w praktyce. Ich wyniki nierzadko okazują się kluczowe w innych działach matematyki (na przykład same metody dowodzenia mogą być wykorzystane w innych sytuacjach). Tu znów widać prawdziwość zdania Stefana Banacha przytoczonego przeze mnie wyżej. Żadna praca włożona w matematykę nie jest zmarnowana. Wcześniej czy później pojawia się ktoś, kto adaptuje matematyczną teorię do własnych (praktycznych nierzadko) potrzeb.

Piękno teorii i nieskończoności

To będzie niejako podsumowanie. Chciałbym tutaj wyrazić swój podziw dla teorii, która autorowi zajęła jak czytałem ponad 10 lat pracy. 10 lat pracy to jednak mało w porównaniu z nieskończonością. A tej jak mniemam Gödel dotknął i jako jeden z nielicznych ją rozumiał.

W logice, a właściwie w całej matematyce i ogólnie w naukowych dociekaniach człowieka, zawsze pojawiało się pojęcie nieskończoności. Na początku bywał to po prostu nieogarnięty i wszechmocny Bóg. Potem wraz z rozwojem nauk ludzie zastanawiali, jak dzieli się materia (tzn. czy jest ciągła (a ciągłość implikuje nieskończoność), czy ziarnista), formułowali także problemy napotkane podczas badania zbiorów nieskończonych (paradoksy Zenona z Elei). Stopniowy rozwój nauk, przede wszystkim zaś wyniki teorii mnogości i logiki matematycznej, pozwolił część takich problemów rozwiązać. Mimo to pojawiły się nowe.

Właśnie wtedy, wraz z powstaniem matematyki określanej jako współczesna, rozpoczęła się próba chwalebna ale i beznadziejna: aksjomatyzacja wszelkich teorii matematycznych. Kiedyś uważano nawet, że faktycznie matematyka jest nauką schyłkową i właściwie nie można uzyskać w niej zbyt wielu nowych wyników. A koncepcja ta, jak i owa próba zakończyły się niepowodzeniem. I choć nawet teraz pojawiają się kandydatki na teorię wszystkiego, takie jak teoria strun w fizyce czy teoria kategorii w matematyce to jednak doświadczenie pokazuje, że im większa i obszerniejsza jest teoria, tym więcej jeszcze okazuje się nieopisane. Mówi się, zupełnie słusznie, że każda odpowiedź rodzi dziesiątki pytań. Każdy nowy aksjomat rodzi nowe twierdzenia.

We wspaniały sposób wpasowuje się tu twierdzenie Gödla. Nie tylko stwierdza, że w każdej teorii istnieją zdania prawdziwe-niedowodliw,e ale też stwierdza, że po ich dołączeniu w poczet aksjomatów pojawią się nowe problemy. I zupełnie tak dzieje się na naszych oczach. Dlatego twierdzenie to zasługuje na szczególną uwagę jako twierdzenie o twierdzeniach, które nie dość, że trudne i piękne, to prawdziwe i bliskie rzeczywistemu rozwojowi nauk.

Niesamowita ilość pozycji jakie można znaleźć na jego temat pozwala na dogłębne studia nad problemem. Mam nadzieję, że ja z moją skromną wiedzą (ale i zapałem) nie nadużyłem czasu ani cierpliwości czytelnika. Myślę, że każdy wykształcony człowiek, nie tylko zawodowy matematyk, powinien wiedzieć o wynikach Kurta Gödla.

Bibliografia

1. Witold Marciszewski i Paweł Stacewicz, *Umysł - Komputer - Świat. O zagadce umysłu z informatycznego puktu widzenia*, 2011, 271-286, *Dynamika umysłu w perspektywnie gödlowskiej*

2. Witold Marciszewski, *O pewnym stosunku między matematyką i filozofią w świetle twierdzenia o nierozstrzygalności arytmetyki,* http://calculemus.org/cafe-aleph/raclog-12/mat-fil.html

3. Jerzy Pogonowski, *Metalogika (8),* www.logic.amu.edu.pl/images/4/4d/Metalogikaopole08.pdf

4. en(pl).wikipedia.org/