

Informatyka i jej związek z matematyką

Źródło: Donald E. Knuth, Computer science and its relation to mathematics, *American Mathematical Monthly* 81 (4) (1974), 323–343 [fragmenty: s. 323–329]⁴

Nowa dziedzina, nazywana informatyką, pojawiła się ostatnio na większości uniwersytetów na świecie. Artykuł niniejszy ukazuje moje osobiste poglądy na temat tego, jakie związki łączą ją z matematyką – pokażemy to, rozważając podobieństwa i różnice między tymi dziedzinami oraz badając, w jaki sposób dziedziny te pomagają sobie wzajemnie. [...]

1. Czym jest informatyka?

Ponieważ informatyka jest czymś względnie nowym, muszę zacząć od wyjaśnienia, o czym ona traktuje. Żona mówi mi, że zmuszona jest wyjaśniać to, gdy jest pytana, czym ja się zajmuję. Wydaje mi się, że większość ludzi ma dziś trochę inne spojrzenie na informatykę niż ja. Istotnie, żadnych dwóch informatyków nie poda prawdopodobnie tej samej definicji swojej dziedziny; nie powinno to dziwić, gdyż podobnie trudno będzie znaleźć dwóch matematyków, którzy podaliby tę samą definicję matematyki. Na szczęście modny jest ostatnio „kryzys tożsamości” – informatycy są więc w głównym nurcie.

Mój ulubiony sposób definiowania informatyki to stwierdzenie, że jest ona badaniem *algorytmów*. Algorytm [z kolei] to precyzyjnie określony ciąg reguł mówiący, jak otrzymać określoną informację wyjściową z danej informacji wejściowej w skończonej liczbie kroków. Konkretna reprezentacja algorytmu nazywana jest programem, tak jak używamy słowa „dane” na określenie konkretnej reprezentacji „informacji” (Knuth 1966). Być może największym odkryciem będącym rezultatem wprowadzenia komputerów okaże się to, że algorytmom, jako przedmiotom badania, przysługuje niezwykle bogactwo interesujących własności oraz to, że algorytmiczny punkt widzenia jest użytecznym sposobem organizacji wiedzy w ogólności. G.E. Forsythe zauważył, że „pytanie ‘Co może zostać zautomatyzowane?’ jest jednym z najbardziej inspirujących pytań filozoficznych i praktycznych współczesnej cywilizacji” (Forsythe 1966).

Z powyższych uwag możemy wyciągnąć wniosek, że informatyka powinna być istnieć na długo przed pojawieniem się komputerów. W pewnym sensie tak było; przedmiot ten jest głęboko zakorzeniony w historii. Z zainteresowa-

⁴ Copyright The Mathematical Association of America, 2013. All rights reserved.

nem badałem ostatnio pewien starożytny manuskrypt, zastanawiając się, w jakim stopniu Babilończycy sprzed 3500 lat byli właściwie informatykami (Knuth 1972). Komputery są jednak rzeczywiście konieczne, by móc mówić o ogólnych własnościach algorytmów; ludzie nie są wystarczająco dokładni ani szybcy, aby przeprowadzać procedury poza tymi najprostszymi. Stąd też potencjalne bogactwo badań nad algorytmami nie mogło się ujawnić zanim uniwersalne maszyny liczące nie stały się dostępne.

Muszę podkreślić, że maszyny liczące (i algorytmy) nie tylko liczą na *liczbach*; mogą one zajmować się wszelkiego rodzaju informacją, jeśli tylko jest ona przedstawiona w sposób precyzyjny. Zwykliśmy powiadać, że ciąg symboli, taki jak nazwa, jest przedstawiony w komputerze tak, jakby był liczbą; poprawniej jednak byłoby powiedzieć, że liczba jest reprezentowana w komputerze jako ciąg symboli.

Francuskie określenie na „computer science” to *Informatique*; niemieckie to *Informatik*; a w duńskim – *Datalogi* (Naur 1966). Wszystkie te określenia implikują, że informatyka ma do czynienia z wieloma rzeczami oprócz rozwiązywania równań numerycznych. Określenia te zwracają uwagę na „material”, na którym działają algorytmy (informacja czy dane), a nie na same algorytmy jako takie. Uczni z uniwersytetu w Oslo zaproponowali inną, bardziej odpowiednią nazwę na „computer science”, a mianowicie *Databehandling*; jej angielski odpowiednik „przetwarzanie danych” jest, niestety, używany w Ameryce tylko w odniesieniu do zastosowań biznesowych, podczas gdy „przetwarzanie informacji” sugeruje zastosowania biblioteczne. Niektórzy proponowali termin „computing science” jako nadrzędny w stosunku do „computer science”.

Poszukiwanie doskonałej nazwy jest w jakimś sensie bezcelowe, gdyż ważniejsze niż nazwa są główne pojęcia leżące u podstaw dziedziny. Ważne jest może to, że żadna z tych innych nazw na „computer science” nie podkreśla roli komputerów – wręcz przeciwnie, a robi tak zapewne po to, by uczynić rozważaną dziedzinę bardziej „z prawego łoża” i szacowną. W opinii wielu ludzi maszyny liczące są w najlepszym razie złem koniecznym: są trudnym narzędziem, którego trzeba użyć, gdy zawodzą inne metody. Dlaczego mielibyśmy tyle uwagi poświęcać uczeniu, jak używać komputerów, gdy są one jedynie wartościowym narzędziem, jak, powiedzmy, mikroskop elektronowy?

Informatycy, wiedząc, że komputery to coś więcej, instynktownie przywiązują mniejszą wagę do aspektu maszynowego, gdy bronią swojej dyscypliny. Taka samoświadomość w odniesieniu do [roli] maszyn nie jest jednak konieczna, co trafnie podkreślili Newell, Perlis i Simon w (1967), definiując informatykę po prostu jako badanie komputerów podobne do tego, jak botanika bada rośliny, astronomia gwiazdy itd. Zagadnienia związane z komputerami są bar-

dzo rozmaite i złożone, wymagają one opisu i wyjaśnienia; podobnie jak elektryczność, należą zarówno do inżynierii, jak i do nauki.

Kiedy mówię, że informatyka zajmuje się badaniem algorytmów, to zwracam uwagę tylko na jedno zagadnienie związane z komputerami, a informatyka zajmuje się przecież także wieloma innymi. Zwracam uwagę właśnie na algorytmy, ponieważ należą one do jądra tej dziedziny, stanowią wspólny mianownik leżący u podstaw i unifikujący różne jej gałęzie. Może się zdarzyć, że w pewnym momencie technologia ustabilizuje się na tyle, że powiedzmy za 25 lat maszyny liczące będą podlegały niewielkim tylko zmianom. Na razie nic na to nie wskazuje, przeciwnie, uważam jednak, że badanie algorytmów pozostanie czymś ważnym i będzie stanowić wyzwanie, nawet jeśli pewnego dnia wyczerpią się inne zagadnienia związane z komputerami. [...]

2. Czy informatyka jest częścią matematyki?

Z pewnością istnieją zagadnienia dotyczące komputerów, które intensywnie badają informatycy, a które są mało matematyczne. Jeśli jednak ograniczymy się do badania algorytmów, to czy informatyka nie jest częścią matematyki? Algorytmy były przecież badane na początku – zanim nastąpiła era komputerów – przez matematyków, jeśli w ogóle były badane. Można więc argumentować, że ten centralny aspekt informatyki istotnie stanowi część matematyki.

Uważam jednak, że można użyć podobnego argumentu na rzecz tezy, że to matematyka jest częścią informatyki! W konsekwencji, na mocy definicji równości zbiorów, obie dziedziny okazałyby się identyczne; albo, na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina, co najmniej równoliczne.

Wydaje mi się, że żadna z tych inkluzji jednak nie zachodzi. Ustalenie dokładnych granic pomiędzy dyscyplinami stanowi zawsze trudne zadanie (wystarczy porównać na przykład takie dziedziny jak „chemia fizyczna” i „fizyka chemiczna”); można jednak wskazać istotne różnice między matematyką i informatyką.

Następująca prawdziwa historia najlepiej wyjaśni, co mam na myśli. Otóż kilka lat temu dowiedziałem się o twierdzeniu matematycznym mówiącym, że dowolne dwie $n \times n$ macierze A i B liczb całkowitych mają „największy wspólny prawy dzielnik” D . Oznacza to, że D jest prawym dzielnikiem A oraz B , tzn. $A = A'D$ oraz $B = B'D$ dla pewnych macierzy liczb całkowitych A' i B' oraz że każdy prawy dzielnik A i B jest prawym dzielnikiem D . Zastanawiałem się więc, jak wyrachować taki największy wspólny prawy dzielnik dwóch danych macierzy. Kilka dni później brałem udział w konferencji, na której spotkałem matematyka H.B. Manna, który powinien był to wiedzieć. Zapytałem go więc i rzeczywiście znał on poprawną odpowiedź; była to jednak odpowiedź matematyka, a nie

informatyka! Powiedział on: „Niech \mathcal{R} będzie pierścieniem macierzy $n \times n$ liczb całkowitych; w pierścieniu tym suma dwóch lewych ideałów głównych jest ideałem głównym; niech zatem D będzie takie, że

$$\mathcal{R}A + \mathcal{R}B = \mathcal{R}D.$$

Zatem D jest największym wspólnym prawym dzielnikiem A i B .” Formuła powyższa jest z pewnością prosta, wystarczy tylko osiem symboli, by ją napisać. Opiera się ona na udowodnionym w sposób ścisły twierdzeniu algebry. Jednak z punktu widzenia informatyka jest ona bezwartościowa, wymaga bowiem konstrukcji nieskończonych zbiorów $\mathcal{R}A$ i $\mathcal{R}B$, wzięcia ich sumy, następnie szukania wśród nieskończenie wielu macierzy macierzy D takiej, że suma ta jest równa $\mathcal{R}D$. Nie jestem w stanie wyznaczyć największego wspólnego dziel-

nika macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ przez wykonanie takich nieskończonych operacji. [...]

Jeden z moich przyjaciół matematyków powiedział, że będzie skłonny uznać informatykę za wartościową dziedzinę badań, gdy pojawi się w niej 1000 głębokich twierdzeń. Kryterium to powinno być oczywiście zmienione tak, by mówiło nie tylko o twierdzeniach, ale i o algorytmach, powiedzmy o 500 głębokich twierdzeniach i 500 głębokich algorytmach. Jest jednak jasne, że informatyka dzisiejsza nie poddaje się takiemu testowi, jeśli „głęboki” rozumieć w ten sposób, że wybitny specjalista potrzebuje wielu miesięcy, by odkryć twierdzenie czy algorytm. Informatyka jest jeszcze za młoda na to; młodość może więc być przeszkodą. Ciągłe nie znamy najlepszego sposobu opisu algorytmów, ich rozumienia czy dowodzenia ich poprawności, znajdowania ich czy analizowania ich zachowania się, chociaż dokonuje się istotny postęp na wszystkich tych polach. Możliwość owych „1000 głębokich wyników” istnieje, choć być może jedynie 50 zostało dotąd odkrytych.

Aby opisać wzajemny wpływ informatyki i matematyki na siebie oraz funkcje, jakie one pełnią, wybiegnę nieco w przyszłość, do czasów, gdy informatyka będzie trochę bardziej dojrzała i pewniejsza siebie. Najnowsze tendencje pozwalają wyobrazić sobie dzień, gdy informatyka i matematyka będą obie szanowanymi dyscyplinami, pełniącymi podobne, choć różne funkcje w wykształceniu. Zacytujmy ponownie George’a Forsythe’a: „Najbardziej wartościowym elementem edukacji naukowej czy technicznej są służące ogólnym celom narzędzia umysłowe, które będą służyły przez całe życie. Szacuję, że język naturalny i matematyka są najważniejszymi takimi narzędziami, a informatyka stanowi trzecie narzędzie” (Forsythe 1959).

Podobnie jak matematyka, informatyka będzie traktowana jako podstawowy element edukacji. Podobnie jak matematyka i inne nauki, informatyka bę-

dzie ciągle podzielona na dwie strefy, które nazwać można „teoretyczną” i „stosowaną”. Podobnie jak matematyka, informatyka będzie różniła się od innych nauk przez to, że ma do czynienia z prawami ustanowionymi przez człowieka, które to prawa można uzasadnić, a nie z prawami naturalnymi, których nigdy nie poznamy z całą pewnością. Zatem dziedziny te będą do siebie podobne na wiele sposobów. Różnica między nimi polega na przedmiocie badań i na podejściu – matematyka zajmuje się mniej czy bardziej twierdzeniami, nieskończonymi procesami, relacjami statycznymi, a informatyka ma do czynienia z algorytmami, skończonymi konstrukcjami i relacjami dynamicznymi.

Wielu informatyków zajmuje się matematyką, ale o wiele więcej matematyków zajmuje się tak naprawdę informatyką. Jestem pod wrażeniem licznych przykładów teorii matematycznych, które w istocie traktują o szczególnych algorytmach; teorie te formułowano w terminach matematycznych, nieporęcznych i mniej naturalnych niż równoważne im sformułowania algorytmiczne, których użyłby dzisiejszy informatyk. Na przykład większa część z liczącej 35 stron pracy Abrahama Walda może być przedstawiona na dwóch stronach, jeśli wyrazić ją w terminach algorytmów (Knuth 1969, s. 142–144); można podać wiele innych przykładów. Ale to już temat na inną pracę.

3. Edukacyjne efekty poboczne

Ktoś dobrze wyedukowany w informatyce wie, jak obchodzić się z algorytmami: jak je konstruować, jak je przekształcać, jak je rozumieć, jak je analizować. Taka wiedza daje mu więcej niż możliwość pisania dobrych programów komputerowych, jest to bowiem narzędzie umysłowe mogące służyć różnym celom i rozumieniu innych obiektów: chemicznych, językowych, muzycznych itp. Można to wyjaśnić następująco: często powiada się, że rozumie się dobrze daną rzecz dopiero wtedy, gdy jest się w stanie nauczyć jej kogoś innego. Istotnie, nie rozumie się dobrze, dopóki nie jest się w stanie nauczyć tego komputera, czyli wyrazić danej rzeczy jako algorytmu. „Komputer wymusza taką precyzję myślenia, jaka jest wynikiem studiowania matematyki” (Forsythe 1959). Próba sformalizowania czegoś w postaci algorytmu prowadzi do głębszego zrozumienia niż ma to miejsce, gdy po prostu próbuje się daną rzecz pojąć w sposób tradycyjny.

Lingwiści sądzili, że rozumieją języki, dopóki nie próbowali wyjaśnić tego komputerowi; zdali sobie wtedy sprawę z tego, ile trzeba się jeszcze nauczyć. Wielu budowało modele komputerowe i odkryło przy tym, że dowiaduje się więcej, budując taki model, niż przyglądając się wynikowi możliwego programu. [...]

Pisząc książkę z arytmetyki komputerowej (Knuth 1969), doszedłem do wniosku, że prawie każde twierdzenie elementarnej teorii liczb powstaje w naturalny sposób w powiązaniu z problemem zmuszenia komputera do wykonania szybkich obliczeń. Stąd jestem przekonany, że tradycyjne kursy elementarnej teorii liczb mogłyby być łatwo przekształcone z uwzględnieniem tej obserwacji przez dołożenie motywacji do pięknych twierdzeń.

Te obserwacje przekonały mnie o wartości dydaktycznej podejścia algorytmicznego, do tego, że może być ono pomocne w zrozumieniu różnego rodzaju pojęć. Wierzę, że student zgłębiający informatykę uczy się w istocie czegoś, co pomoże mu dawać sobie radę z innymi sytuacjami. [...]

4. Niektóre oddziaływania wzajemne

Informatyka wpływa na matematykę na wiele sposobów – spróbuję niektóre wymenić. Przede wszystkim komputery mogą być używane do wykonywania obliczeń, i rzeczywiście były one wielokrotnie stosowane w badaniach matematycznych, gdy obliczenia ręczne były zbyt trudne. Gauss powiedział (1863), że pomyślał po raz pierwszy o twierdzeniu o liczbach pierwszych, gdy przyjrzał się tablicy liczb pierwszych mniejszych od miliona. W mojej rozprawie doktorskiej rozwiązałem hipotezę dotyczącą nieskończenie wielu przypadków przez dokładniejsze przyjrzenie się obliczeniom komputerowym w najprostszym przypadku (Knuth 1965). [...]

Po drugie, oczywiście są powiązania informatyki i matematyki w analizie numerycznej (Wilkinson 1971), logice i teorii liczb; nie muszę wchodzić tu w szczegóły, gdyż są one szeroko znane. [...]

Wpływ informatyki znajduje też wyraz w rosnącym nacisku, jaki kładzie się we wszystkich gałęziach matematyki na konstrukcje. Zastąpienie dowodów istnienia przez algorytmy, które pozwalają konstruować obiekty matematyczne, prowadzi często do ulepszenia teorii abstrakcyjnej. [...] Dalej, jak zauważyliśmy powyżej, konstruktywne podejście algorytmiczne ma często wartość dydaktyczną.

Innym sposobem, w jaki podejście algorytmiczne oddziałuje na teorie matematyczne, jest konstrukcja odpowiedniości jedno-jednoznacznej. Często spotyka się dowody pośrednie tego, że obiekty matematyczne pewnego typu są równoliczne; bezpośrednio skonstruowanie takiej odpowiedniości jedno-jednoznacznej pokazuje, że w istocie zachodzą głębsze zależności.

Matematyka dyskretna, w szczególności kombinatoryka, uzyskały dodatkowy impuls dzięki rozwojowi informatyki; to samo odnosi się do innych dziedzin, w których szeroko stosuje się matematykę dyskretną. [...]

Najważniejszy jednak wpływ i oddziaływanie informatyki na matematykę polega, moim zdaniem, na czymś zupełnie innym. Otóż najważniejsze jest to, że badanie algorytmów otworzyło obszar nowych interesujących problemów matematycznych; tchnęło nowe życie w wiele dziedzin matematyki, które cierpiały na brak nowych pomysłów. Charles Babbage, jeden z „ojców” maszyn liczących, przewidywał to już w roku 1864 [pisząc]: „Gdy tylko pojawią się maszyny analityczne [tzn. komputery wielozadaniowe], będą one w sposób konieczny sterowały dalszym rozwojem nauki. Gdy poszukuje się wyniku z ich pomocą, zawsze pojawia się pytanie – za pomocą jakich obliczeń maszyna może osiągnąć te wyniki w najkrótszym czasie?” (Babbage 1961). A George Forsythe w roku 1958 [pisał]: „Stosowanie praktycznie dowolnej techniki obliczeniowej rodzi wiele problemów matematycznych. Ma więc miejsce godny uwagi wpływ obliczeń na matematykę jako taką i można oczekiwać, że wpłynie to w wysokim stopniu na badania matematyczne” (Rosenbloom i Forsythe 1958). Garrett Birkhoff (Birkhoff i Hall 1971, s. 2) zauważył, że oddziaływanie takie to nic nowego, takie związki bowiem istniały już w starożytnej matematyce greckiej.

Wydaje mi się, że o wiele bardziej intrygujące problemy matematyczne powstają, gdy próbuje się analizować algorytmy ilościowo, pytając, jak szybko będą one realizowane na komputerze [...]. Inna grupa interesujących problemów to szukanie najlepszych możliwych algorytmów w danej klasie [...]. Jedną z pierwszych teorii matematycznych zainspirowanych przez informatykę jest teoria języków, w której mamy wiele pięknych wyników [...]. Fascynacja tymi nowymi teoriami sprawiła, że zostałem informatykiem.

Matematyka wywiera także głęboki wpływ na informatykę; niemal każda gałąź matematyki wpłynęła tu na coś. Ostatnio zajmowałem się problemem dotyczącym obiektów dyskretnych zwanych drzewami binarnymi, które powstają często jako reprezentacje komputerowe [...]. Wyniki matematyki klasycznej mogą być użyteczne w zaskakujących miejscach.

Najbardziej zaskakującą rzeczą w moich doświadczeniach dotyczących zastosowań matematyki w informatyce był fakt, że tak duża część matematyki miała charakter dyskretny [...].

Literatura cytowana

- BABBAGE CH. (1961), *Passages from the Life of a Philosopher*, London 1864. Reprinted in: *Charles Babbage and His Calculating Engines*, by Philip and Emily Morrison, Dover, New York.
- BIRKHOFF G., HALL M., JR. (eds.) (1971), Computers in algebra and number theory, *SIAM-AMS Proceedings* 4.
- FORSYTHE G.E. (1959), The role of numerical analysis in an undergraduate program, *American Mathematical Monthly* 66, 651–662.